СТРАХОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ СРОЧНЫМИ КОНТРАКТАМИ

А.К. Керимов

Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

Рассматривается задача динамического страхования портфеля акций посредством добавления в него фьючерсных контрактов. Определяется ожидаемый доход и дисперсия смешанного портфеля с учетом корреляции между изменениями спотовых и фьючерсных цен на базовые активы. При постановке задачи страхования, кроме дисперсии портфеля, учитываются ограничения на ожидаемый доход и количество фьючерсных контрактов. Оценка эффективных портфелей предполагает использование адаптивных методов прогноза необходимых ценовых параметров. Все теоретические выводы иллюстрируются на конкретном примере.

Ключевые слова: фьючерсные контракты, смешанные портфели. доход и риск портфеля, оптимизация портфеля.

Страхование или хеджирование инвестиционного портфеля является одной из основных задач портфельного менеджмента. Метод страхования на основе фьючерсных контрактов базируется на сильной положительной корреляции между изменениями цены спот и фьючерсной цены на заданный актив. На фондовой бирже РТС представлены фьючерсные контракты на акции крупных российских корпораций. Все контракты имеют одинаковую структуру [9]. Различия касаются количества акций в одном фьючерсном контракте. Например, фьючерсный контракт на акции Газпрома содержит 100 акций, а на акции Лукойла — 10 акций.

Основным вопросом страхования является оценка необходимого числа фьючерсных контрактов для страхования позиции и оценка эффективности страхования на заданный период. Традиционный метод оценки оптимального числа фьючерсных контрактов предполагает оценку регрессии изменения цены спот на изменения фьючерсной цены [2; 5; 7]. Коэффициент при изменении фьючерсной цены в этой регрессии определяет необходимое число фьючерсных контрактов, реализующих минимум дисперсии смешанного портфеля. В случае портфеля акций рекомендуется использовать технику страхования по каждому активу по приведенной выше схеме. Этот подход обладает следующими недостатками. Во-первых, в случае портфеля акций не учитывается степень коррелированности изменений цен активов, составляющих портфель. Например, изменения цен акций «голубых фишек» сильно положительно коррелированны, уровень корреляции составляет величину порядка 0,7—0,9 (табл. 1). Во-вторых, временные ряды изменений цены спот и фьючерс, как правило, не обладают необходимой однородностью по среднему уровню и дисперсии (рис. 1—3). Неустойчивость среднего уровня ведет к неадекватному прогнозу ожидаемого дохода. Неустойчивость по дисперсии (гетероскедастичность) ведет к искажениям коэффициента хеджирования. Отметим также, что уровень связи между (ковариации) изменениями спотовых и фьючерсных цен, вообще говоря, меняется во времени. Далее, предлагаемые подходы для определения необходимого числа фьючерсных контрактов учитывают только один параметр — дисперсию, характеризующую ценовую изменчивость портфеля. При этом такие важнейшие параметры портфеля, как ожидаемый доход (или доходность) или возможные ограничения на число фьючерсных контрактов не принимаются во внимание. Тем самым не учитывается возможность получения дополнительных прибылей за счет использования деривативов.

В настоящей работе рассматривается динамическое страхование заданного инвестиционного портфеля фьючерсными контрактами с учетом ограничений на ожидаемый доход и число контрактов в условиях сильной корреляции изменений цен базовых активов.

Смешанные портфели и их характеристики. Рассматривается смешанный портфель, содержащий n различных активов A_1, A_2, ... A_n и фьючерсные контракты на них. При этом используются следующие обозначения: Q_{si} — число единиц базового актива номера i, k_i — число фьючерсных контрактов на i-й актив ($i = 1, 2, ..., n$). Таким образом, портфель определяется набором целых чисел (Q_{s1}, Q_{s2}, ..., Q_{sn}, k_1, k_2, ..., k_n). Знак целого k_i определяет позицию по контракту: $k_i > 0$ означает, что портфель содержит k_i контрактов на покупку актива (или k_i длинных позиций), $k_i < 0$ — портфель содержит $|k_i|$ контрактов на продажу актива (или $|k_i|$ коротких позиций). То же самое замечание справедливо и для Q_i, однако для определенности в дальнейшем считается, что по базовым активам портфель содержит только длинные позиции, т.е. все $Q_i > 0$.

Обозначим через $S_i(t)$ и $F_i(t)$ (i = 1, 2, … n) цену спот и фьючерсную цену (в денежном выражении) на момент времени t, q_{fi} — число единиц базового актива в одном фьючерсном контракте номера i. Тогда изменение стоимости портфеля за единицу времени представляется в виде [7]:

$$\nabla P(t) = \sum_{i=1}^{n} \nabla S_i(t) Q_{si} + \sum_{i=1}^{n} \nabla F_i(t) k_i q_{fi}, \tag{1}$$

где через $\nabla P(t)$, $\nabla S_i(t)$, $\nabla F_i(t)$ обозначают изменения соответствующих величин за единицу времени:

$$\nabla P(t) = P(t) - P(t-1),\ \ \nabla S_i(t) = S_i(t) - S_i(t-1),$$
$$\nabla F_i(t) = F_i(t) - F_i(t-1).$$

Обычно, если не оговорено противное, в качестве единицы измерения времени выбираются сутки. Формула (1) принимает более компактный вид, если использовать векторные обозначения:

$$\nabla P(t) = \left(\nabla S(t), Q_s\right) + \left(\nabla F(t), Q_f\right),$$

где $\nabla S(t)$, $\nabla F(t)$, Q_s, Q_f — вектора с компонентами $\nabla S_i(t)$, $\nabla F_i(t)$, Q_{si}, $Q_{fi} = k_i q_{fi}$ (i = 1, 2, ..., n) соответственно, т.е.

$$S(t) = \begin{pmatrix} \nabla S_1(t) \\ \nabla S_2(t) \\ \vdots \\ \nabla S_n(t) \end{pmatrix},\ \nabla F(t) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(t) \\ \nabla F_2(t) \\ \vdots \\ \nabla F_n(t) \end{pmatrix},\ Qs = \begin{pmatrix} Q_{s1} \\ Q_{s2} \\ \vdots \\ Q_{sn} \end{pmatrix},\ Q_s = \begin{pmatrix} Q_{f1} \\ Q_{f2} \\ \vdots \\ Q_{fn} \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем всегда предполагается, что все рассматриваемые векторы записаны в виде столбцов. Отметим, что вероятностные характеристики изменения рассматриваемых величин меняются во времени, т.е. предполагается, что рассматриваемые изменения являются случайным процессом. Для данного момента t буквой $M = M_t$ будем обозначать ожидаемое значение изменения цены актива на момент $t + 1$ при условии, что история изменения цен до этого момента включительно известна. Так, определенное условное ожидаемое изменение интерпретируется как прогноз изменений цены на один шаг вперед. Дисперсия отклонений фактических изменений от прогноза является мерой ошибки прогноза и называется дисперсией прогноза, соответственно, квадратный корень из дисперсии — это стандартное отклонение фактических изменений от прогноза. По мере появления новых данных прогнозы изменений и их характеристики корректируются, т.е. адаптируются к новым данным. То же самое замечание справедливо и для уровня корреляционной связи между изменениями цен различных активов — корреляция (соответственно ковариация) изменяется во времени, и эти изменения следует корректировать по мере поступления ценовых данных. Простые способы такой коррекции на основе экспоненциального сглаживания приведены в [4]. В дальнейшем все рассматриваемые характеристики — ожидаемое значение, дисперсия и ковариация — относятся к текущему моменту времени и трактуются в вышеприведенном смысле.

Обозначим через $M(\nabla P) = M_t(\nabla P)$ и $D(\nabla P) = D_t(\nabla P)$ математическое ожидание (прогноз) и дисперсию (прогноза) изменений цены портфеля на данный момент t. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. Ожидаемое изменение стоимости портфеля и его дисперсия на данный момент времени t определяются равенствами

$$M(\nabla P) = \left(M_s, Q_s\right) + \left(M_f, Q_f\right), \tag{2}$$

$$D(\nabla P) = \left(C_{ss}Q_s, Q_s\right) + 2\left(C_{sf}Q_f, Q_s\right) + \left(C_{ff}Q_f, Q_f\right), \tag{3}$$

где $M_s = (M_{s1}, M_{s2}, ..., M_{sn})$, $M_f = (M_{f1}, M_{f2}, ..., M_{fn})$ — вектора ожидаемых изменений на текущий момент времени;

$C_{ss} = \left\{Cov\left(\nabla S_i, \nabla S_j\right)\right\}$, $C_{sf} = \left\{Cov\left(\nabla S_i, \nabla F_j\right)\right\}$, $C_{ff} = \left\{Cov\left(\nabla F_i, \nabla F_j\right)\right\}$ — оценки ковариационных матриц размера $n \times n$ на текущий момент времени; (*, *) — скалярное произведение.

Эффективные смешанные портфели. Классическая задача оптимального страхования ставится следующим образом.

Задача 1. Портфель содержит акции известных компаний $A_1, A_2, ..., A_n$, в количествах $Q_{s1}, Q_{s2}, ... Q_{sn}$. Найти количества фьючерсных контрактов $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$ по рассматриваемым акциям, минимизирующих дисперсию портфеля после добавления в него этих контрактов. Математически задача сводится к минимизации дисперсии портфеля по вектору k. Решение представляется в виде

$$Q_f = -C_{ff}^{-1} C_{sf}^{*} Q_s, \ \ k_i = Q_{fi} / q_{fi}, \ \ i = 1, 2, ..., n.$$

Поскольку k_i должны быть целыми числами, то найденные по формуле (5) значения округляются до целых чисел. Решение можно также охарактеризовать как решение задачи минимизации

$$D(\nabla P) = \left(C_{ss}Q_s, Q_s\right) + 2\left(C_{sf}Q_f, Q_s\right) + \left(C_{ff}Q_f, Q_f\right) \to min \text{ по } k \qquad (5)$$

при ограничениях:

$$Q_s = \{Q_{si}\} \text{ — задано, } Q_f = \{k_i q_{fi}\},\ k_i \text{ — целое } (i = 1, 2, ..., n). \qquad (6)$$

Эта задача легко решается в рамках программы EXCEL с помощью средства поиск решения.

В случае независимости изменений цен базовых активов, оптимальное число фьючерсных контрактов по i-му активу сводится к стандартной формуле (i = 1, 2, …, n)

$$k_i = \frac{Q_{si}Cov\left(\nabla S_i, \nabla F_i\right)}{q_{fi}D(\nabla F_i)}.$$

В данной задаче ограничения на ожидаемый доход и на число контрактов отсутствуют, что сильно ограничивает эффективность страхования.

Пример 1. На текущий момент времени t = 03.06.2012 портфель инвестора содержит 1) акции Газпрома, 2) Роснефти и 3) Лукойла по 1000 акций каждой компании.

Фьючерсные контракты на акции Газпрома и Роснефти содержат по 100 акций на контракт, а на акции Лукойла — 10 акций на контракт. Таким образом, в данном случае:

$$Q_s = (1000, 1000, 1000),\ q_f = (100, 100, 10).$$

Корреляционные матрицы изменений цен спот и фьючерс K_{ss}, K_{fs} и K_{ff} на текущий момент времени, оцененные методом скользящих средних с окном 30 дней по истории котировок, представлены в табл. 1. Первая матрица K_{ss} представляет оценки корреляций между изменениями цен спот акций в портфеле. Например, корреляция между изменениями цен Газпрома и Роснефти равна 0,866, корреляция между изменениями цен Газпрома и Лукойла — 0,779, корреляция между изменениями цен Газпрома и Лукойла — 0,675. Таким образом, наблюдается сильная положительная корреляция между изменениями цен рассматриваемых активов и потому формула (7) не дает оптимального числа фьючерсных контрактов для страхования портфеля.

Таблица 1

матрица K_{ss}			матрица K_{sf}			матрица K_{ff}		
1,000	0,866	0,779	0,994	0,861	0,808	1,000	0,871	0,819
0,866	1,000	0,675	0,875	0,995	0,735	0,871	1,000	0,739
0,779	0,675	1,000	0,769	0,683	0,959	0,819	0,739	1,000

Матрица K_{ff} интерпретируется точно так же, как матрица K_{ss} с заменой цен спот на фьючерсные цены. Например, корреляция между изменениями фьючерсных цен Газпрома и Роснефти равна 0,871, корреляция между изменениями фьючерсных цен Газпрома и Лукойла — 0,819 и т.д. Значения этой матрицы показывают, что уровень корреляций между изменениями фьючерсных цен не ниже чем уровень корреляций для цен спот.

Матрица K_{sf} представляет корреляции между изменениями цен спот и фьючерс. Диагональные элементы этой матрицы представляют корреляции между изменениями цен спот и фьючерс на один и тот же актив, так корреляция между изменениями спотовой и фьючерсной цен по Газпрому составляет 0,994, по Роснефти — 0,995, по Лукойлу — 0,959. Такой высокий уровень корреляции обеспечивает высокую эффективность страхования за счет коротких позиций. Далее, так корреляция между изменениями цены спот Газпрома и цены фьючерс для Роснефти составляет 0,861, корреляция между изменениями цены спот Газпрома и цены фьючерс для Лукойла — 0,819, корреляция между изменениями цены спот Роснефти и цены фьючерс для Лукойла — 0,739. Оптимальный набор фьючерсных контрактов, определенный как решение задачи (5), (6), равен $k = (-11, -7, -96)$. Знак «–» означает, что следует продавать контракты, т.е. заключать контракты на продажу акций. Решение осуществляется с помощью средства Поиск Решения программы EXCEL. Дисперсия изменений за день оптимального смешанного портфеля, т.е. портфеля с добавленными фьючерсными контрактами, равна 7 609 366,16. Ожидаемая дисперсия изменений незастрахованного портфеля оценивается величиной 1 497 510 162,66, таким образом, по сравнению с незастрахованным портфелем дисперсия уменьшилась в 20 раз. Отметим, что оптимальное количество контрактов, определенное по формуле (4), дает худший результат (уменьшение дисперсии в 18 раз), поскольку не учитывает сильной положительной корреляции между активами.

Общую задачу оптимизации страхования портфеля активов можно сформулировать следующим образом.

Задача 2. (портфель минимальной дисперсии при заданных ограничениях на доходность и количество контрактов) Найти минимум дисперсии

$$D(\nabla P) = \left(C_{ss}Q_s, Q_s\right) + 2\left(C_{sf}Q_f, Q_s\right) + \left(C_{ff}Q_f, Q_f\right), \tag{8}$$

по вектору $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ при ограничениях:

$$Q_f = \left\{k_i q_{fi}\right\},\ k_i \le k_{gi},\ k_i \text{ — целое},\ i = 1, 2, ..., n, \tag{9}$$

$$M(\nabla P) = \left(M_s, Q_s\right) + \left(M_f, Q_f\right) \ge M_g,\ \text{вектор } Q_s \text{ — задан.} \tag{10}$$

Здесь k_{gi}, $i = 1, 2, ..., n$ — ограничения на количество фьючерсных контрактов, M_g — ограничение на ожидаемый доход смешанного портфеля. Эти параметры задаются исходя из ситуации, сложившейся на рынке. Допустим, что для i-го актива ожидается в ближайшее время падение цены то есть $M_{si} < 0$, тогда в силу сильной корреляции между изменениями цен спот и фьючерс ожидаемое значение для i-го контракта, как правило, тоже будет отрицательно. В этом случае ограничение на число фьючерсных контрактов можно не вводить. Заметим, что в этом случае ограничение $k_i < 0$ является естественным. Если для для i-го актива ожидается повышение цены ($M_{si} > 0$), то можно ограничить количество контрактов для страхования. Можно показать, что при таком выборе ограничений для любого $M_g > 0$ система ограничений (9)—(10) всегда будет совместна и, следовательно, задача (8)—(10) будет иметь решение. Отметим, что это утверждение справедливо в случае, если ожидаемые доходы по ценам спот и ценам фьючерс одного знака.

Пример 2. Рассматриваются данные примера 1. На текущий момент времени t = 03.06.2012 портфель инвестора содержит акции Газпрома, Роснефти и Лукойла по 1000 акций каждой компании. Как и в примере 1, имеем

$$Q_s = (1000, 1000, 1000),\ q_f = (100, 100, 10).$$

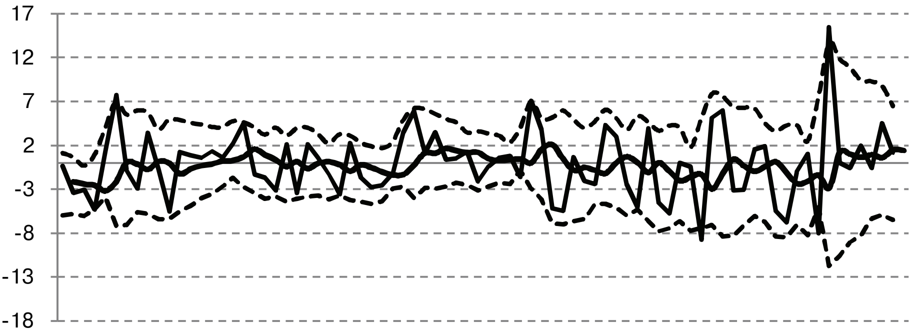

Рис. 1. Динамика изменений цен Газпрома с прогнозами и 90%-ным доверительным коридором

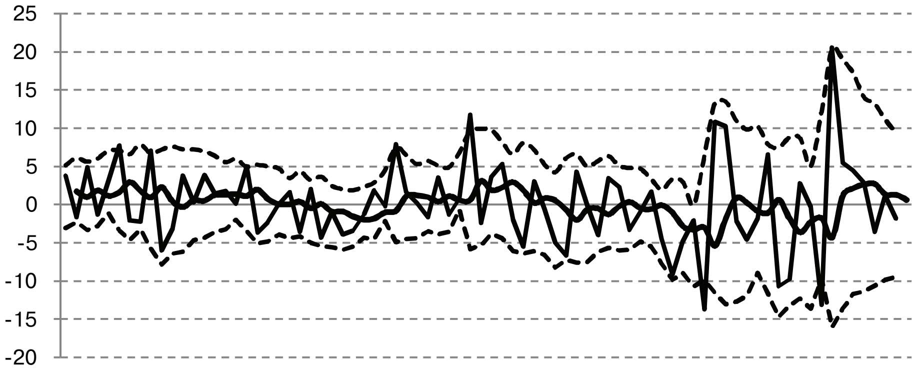

Рис. 2. Динамика изменений цен Роснефти с прогнозами и 90%-ным доверительным коридором.

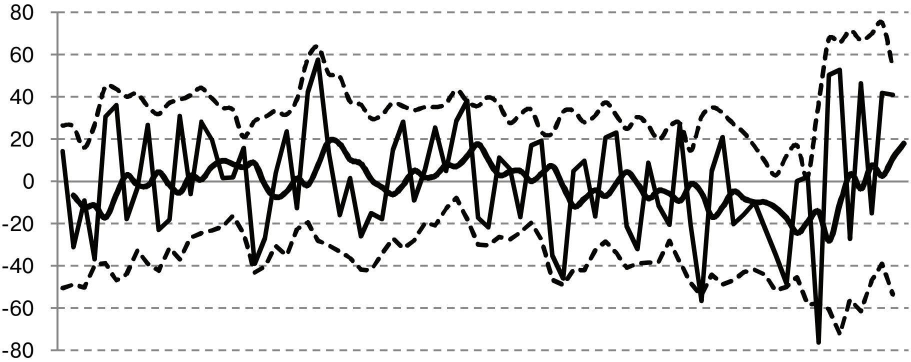

Рис. 3. Динамика изменений цен Лукойла с прогнозами и 90%-ным доверительным коридором

Из рис. 1—3 видно, что возможно падение цены по акциям Газпрома и Роснефти — наблюдается падение изменений цен (дохода) по этим акциям. По акциям Лукойла ожидается рост цены. Прогнозы (M_s) и их стандартные ошибки (σ), оцененные методом экспоненциального сглаживания с окном девять дней (см. [4]) представлены в табл. 2 (см. также рисунки).

Таблица 2

Актив	Q_s	q_f	M_s (руб.)	σ (руб.)	P_s (руб.)
Газпром	1000	100	1,39	3,80	164,98
Роснефть	1000	100	0,61	5,56	224,70
Лукойл	1000	10	17,96	31,48	1 591,00

В данном случае имеет смысл застраховать позиции по Газпрому и Роснефти и частично застраховать позицию по Лукойлу, чтобы обеспечить выигрыш за счет возможного роста цен по этому активу. Если не налагать ограничения на ожидаемый доход и считать, что число продаваемых контрактов по Лукойлу не выше 10, т.е. $k_3 \le -10$, то оптимальное число фьючерсных контрактов по акциям, реализующее минимум дисперсии смешанного портфеля при этом ограничении, определяется вектором $k_{opt} = (-52, -12, -10)$. При этом стандартное отклонение и ожидаемый доход эффективного портфеля равны

$$\sigma_{opt} = 17\,595{,}70 \text{ руб.}, \quad M_s = 11\,235{,}23 \text{ руб.}$$

Дисперсия эффективного портфеля в пять раз меньше не застрахованного портфеля. В рамках нормального приближения риск, т.е. вероятность получить доход меньше нуля оценивается в 0,06 (или 6%). Далее, 90%-ный доверительный интервал для дохода на следующий торговый день имеет вид (–17 792,68 руб., 40 268,13 руб.). Вероятность того, что стоимость портфеля упадет на величину большую 17 792,68 руб., составляет 0,0008 (0,08%). Отметим также, что 17 792,68 руб. составляет менее 1% от стоимости портфеля на текущий момент времени, равной 1 980 680,00 руб. (стоимость портфеля оценивается по графам Q_s и P_s табл. 2). Таким образом, рассматриваемый портфель характеризуется низким уровнем риска. Приводимая ниже табл. 3 характеризует фактическое увеличение/уменьшение стоимости найденного портфеля в ближайшие четыре торговые сессии (графа *DP*1).

Таблица 3

Дата	DS1	DF1	DS2	DF2	DS3	DF3	DPs	DP1	DP2
04.06	−1,98	−1,70	−2,23	−2,27	30,97	32,30	26 760,00	35 094,00	45 022,00
07.06	−4,39	−4,27	−1,72	−2,35	24,00	27,90	17 890,00	40 124,00	37 696,00
08.06	−7,61	−7,57	−10,50	−10,97	4,00	5,00	−14 110,00	37 918,00	43 408,00
09.06	−6,78	−7,03	−10,13	−10,13	14,70	21,50	−2 210,00	44 352,00	54 312,00

В табл. 3 графы *DSI, DFI* (I = 1, 2, 3) представляют изменения цен спот и фьючерс от текущей даты 03.06 до указанной в графе «Дата». Так, например, изменение цены спот и (расчетной) фьючерсной цены на дату 07.06 для акций Газпрома составляет –4,39 руб. и –4,27 руб. соответственно. Графы *DPs* и *DP*1 содержат фактические изменения стоимости незастрахованного портфеля и эффективного портфеля относительно его стоимости на текущий момент времени. Как видно из этих данных, эффективный портфель обеспечивает положительный доход не ниже 35 000 тыс. руб. в течение ближайших четырех дней. Отметим, что коррекция портфеля 07.06 может дать еще больший доход.

Рассмотрим еще один возможный эффективный портфель, определяемый условиями: ожидаемый доход не ниже M_g = 20 000 руб. за день, на фьючерсные контракты никаких ограничений не накладывается. Оптимальное число фьючерсных контрактов по акциям определяется вектором k_{opt} = (–8, –46, 20). При этом стандартное отклонение эффективного портфеля σ_{opt} = 26 250, 36 руб. Дисперсия эффективного портфеля в 2 раза меньше незастрахованного портфеля. В рамках нормального приближения риск, т.е. вероятность получить доход меньше нуля оценивается в 0,096 (или ≈10%); 90%-ный доверительный интервал для дохода на следующий торговый день равен (–23 236,87 руб., 63 389,33 руб.). Вероятность того, что стоимость портфеля упадет на величину большую 23 236,87 руб. составляет 0, 0068 (0,7%); при этом 23 236,87 руб. составляет менее 1,2% от стоимости портфеля на текущий момент времени. Таким образом, рассматриваемый портфель характеризуется вполне допустимым уровнем риска. Графа *DP2* табл. 3 содержит фактические изменения стоимости этого эффективного портфеля относительно его стоимости на текущий момент времени. Как видно из этих данных, эффективный портфель обеспечивает гораздо более высокий доход, чем предыдущий эффективный портфель.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов: прогноз и управление. — М.: Мир, 1974.
[2] *Буренин А.М.* Хеджирование фьючерсным контрактами фондовой биржи РТС. — М.: НТО им. С.И. Вавилова, 2008.
[3] *Керимов А.К.* Анализ и прогнозирования временных рядов. — М.: РУДН, 2005.
[4] *Керимов А.К.* Методы анализа и прогнозирования ценовых данных. — М.: РУДН, 2003.
[5] *Керимов А.К.* Финансовые фьючерсные контракты — М.: Финансовый университет, 2013.
[6] *Лукашин Ю.П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования. — М.: Статистика, 1981.
[7] *Халл Дж.К.* Опционы, фьючерсы и другие финансовые инструменты. — М.: Вильямс, 2010.
[8] *Cecchetti S.G., Gumby R.E., Figlewsci S.* Estimation of the optimal futures hedge // Review of Economics and Statistics. — 1988. — Vol. 7.
[9] URL: http://www.rts.ru сайт фондовой биржи РТС.

LITERATURA

[1] *Box Dzh., Jenkins G.* Analiz vremennykh ryadov: prognoz b upravlenie. — M.: Mir, 1974.
[2] *Burenin A.M.* Khedjirovanie furersnymi kontraktami fondovy birzhi RTS. — M.: NTO im. S.I. Vavilova, 2008.
[3] *Kerimov A.K.* Analiz I prognozirovanie vremennykh ryadov. — M.: RUDN, 2005.
[4] *Kerimov A.K.* Metody analiza i prognozirovania tsenovykh dannykh. — M.: RUDN, 2003.
[5] *Kerimov A.K.* Finansovye fyuchersnye kontrakty. — M.: Finansovy Universitet, 2013.

[6] *Lukashin Yu.P.* Adaptivnye metody kratkosrochnogo prognozirovania. — M.: Statistika, 1981.
[7] *Hull Dzh.K.* Optsiony, fuchersy i drugiefinansovye instrumenty. — M.: Vilyams, 2010.
[8] *Cecchetti S.G., Gumby R.E., Figlewsci S.* Estimation of the optimal futures hedge // Review of Economics and Statistics. — 1988. — Vol. 7.
[9] URL: http://www.rts.ru сайт фондовой биржи РТС.

MEAN-VARIANCE FUTURE HEDGING FOR SECURITY PORTFOLIO

A.K. Kerimov

Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaia str., 6, Moscow, Russia, 117198

The mean-variance approach futures hedging is under consideration. The representation of expected return and variation are derived for portfolio with futures. The hedging problem statement assumes limitations on expected return and on the number of futures in portfolio subject to market conditions. Adaptive methods for forecasting of necessary price parameters are used to estimate the efficient portfolio. All theoretical conclusions are illustrated on concrete examples.

Key words: futures, expected return and risk of portfolio with futures, efficient portfolio.